

# КІНЕМАТИКА

## Тема 1.5: Кінематика точки.

### План

1. Предмет кінематики. Спокій і рух, відносність цих понять. Система відліку. Основні поняття кінематики: траєкторія, відстань, шлях, швидкість, прискорення.
2. Способи задання руху точки. Натуральний спосіб руху точки; швидкість та прискорення точки. Прискорення повне, нормальне, дотичне.
3. Види руху точки залежно від прискорення.

### **1. Предмет кінематики. Спокій і рух, відносність цих понять. Система відліку. Основні поняття кінематики: траєкторія, відстань, шлях, швидкість, прискорення.**

**Кінематикою** називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл у просторі з геометричної точки зору, без врахування сил, що діють на них.

**Рух у механіці** - це зміна з часом положення даного тіла в просторі відносно інших тіл.

Щоб визначити положення рухомого тіла (або точки) в просторі будь-яку систему координат жорстко зв'язують з тим тілом, відносно якого вивчають рух. Цю систему координат називають **системою відліку**. Система відліку може бути **рухомою** і **умовно нерухомою**. Рух тіла відносно нерухомої системи відліку називають абсолютним; а відносно рухомої відносним.

Рух тіла відбувається в просторі з часом. Простір в механіці розглядають як тривимірний евклідовий простір. **Час** – це скалярна безперервно змінна величина, і його вважають незалежною змінною величиною.

Крива, яку описує точка при русі її в просторі відносно вибраної системи відліку, називається її **траєкторією**.

### **2. Способи задання руху точки. Натуральний спосіб руху точки; швидкість та прискорення точки. Прискорення повне, нормальне, дотичне.**

Рух точки задається двома способами: натуральним і координатним.

При **натуральному** способі задається, траєкторія і рівняння руху по цій траєкторії, а також початок і напрям руху.

Рівняння руху в загальному випадку:

$$S = f(t),$$

де:  $S$  – відстань точки від початкового положення, що є функцією часу;

$t$  – час руху точки від початкового моменту.

Знаючи траєкторію руху точки і рівняння руху по цій траєкторії, можна визначити положення точки в будь-який момент часу; для цього в рівняння  $S = f(t)$  треба підставити час.

**Координатний** спосіб полягає у тому, що положення точки у системі відліку визначається трьома координатами  $X, Y, Z$ .

Рівняння руху точки у координатному вигляді  $X = f(t)$ ;  $Y = f(t)$ ;  $Z = f(t)$ , за допомогою їх в кожний момент часу можна визначити положення точки в просторі.

Якщо точка за довільно вибрані, але рівні проміжки часу проходить однаковий шлях, то рух її називається **рівномірним**, а в протилежному випадку - **нерівномірним**.

При рівномірному русі швидкість точки є сталою величиною, а при нерівномірному – змінною. Найпростіше швидкість точки визначається тоді, коли вона рухається рівномірно і прямолінійно. У цьому разі модуль швидкості дорівнює відношенню шляху  $S$ , пройденого точкою, до проміжку часу  $t$ , протягом якого рухалась точка

$$V = \frac{S}{t}$$

При прямолінійному русі точки вектор швидкості буде направлений по прямолінійній траєкторії з даного положення точки в бік її руху.

При рівномірному прямолінійному русі, шлях  $S$ , пройдений точкою дорівнює добутку швидкості  $V$  точки на час її руху,  $S = V \cdot t$ , це рівняння називають рівнянням рівномірно-прямолінійного руху точки.

Якщо в початковий момент часу ( $t = 0$ ) точка  $M$  знаходиться від точки  $O$  на відстані  $S_0 = OM_0$ , тобто в точці  $M_0$  (рис. 1), то рівняння руху матиме вигляд:  $S = S_0 + V \cdot t$ .

Тоді швидкість точки дорівнює  $V = \frac{S - S_0}{t}$  ( м/с ),

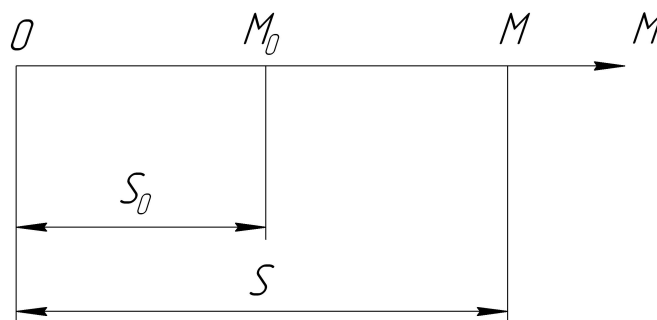


Рис.1

При нерівномірному русі розрізняють два поняття: **середня швидкість** і **швидкість у даний момент**.

Розглянемо, як визначається швидкість точки у загальному випадку нерівномірного криволінійного руху при натуральному способі визначення руху.

Позначимо проміжок часу, протягом якого відбувається рух, через  $\Delta t$ . Знак  $\Delta$  (грецька літера «дельта») означає приріст відповідної змінної величини (в даному випадку  $t$ ). Нехай будь-яка точка  $M$  рухається по криволінійній траєкторії (рис. 2). У момент часу  $t$  ця точка займає на траєкторії положення

М, а за проміжок часу  $\Delta t$  пройде відстань і перейде в положення  $M_1$ . З'єднаємо точки  $M$  і  $M_1$  вектором. Вектор  $MM_1$  називається **вектором переміщення** точки за деякий проміжок часу.

Середня швидкість точки буде визначатись так:  $V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ .

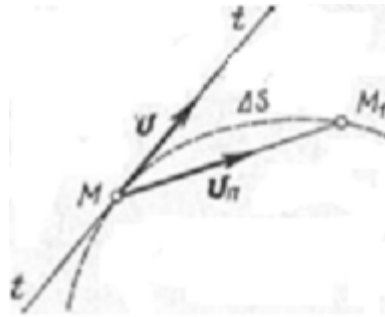


Рис.2

Переміщення точки  $MM_1$  є вектор, а тому вектор середньої швидкості точки має напрям вектора її переміщення, оскільки  $\Delta t$  є скалярна величина.

Якщо зменшувати проміжок часу, залишаючи незмінним початок цього проміжку, то безперервно буде зменшуватись і величина переміщення  $MM_1 = \Delta S$  точки, а середня швидкість буде приближатись до значення швидкості точки в даний момент часу.

Швидкості точки в даний момент часу – це границя, до якої прямує середня швидкість, коли  $\Delta t$  прямує до нуля.

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

Отже, *швидкість  $V$  точки в даний момент часу дорівнює першій похідній за часом від дугової координати*. Швидкість направлена по дотичній до траєкторії в бік руху точки.

**Величина, яка характеризує зміну вектора швидкості за модулем і напрямом, називається прискоренням.**

У прямолінійному русі точки вектор швидкості завжди збігається з траєкторією і тому вектор зміни швидкості також збігається з траєкторією. Якщо за невеликий проміжок часу  $\Delta t$  швидкість точки змінилася на  $\Delta V$ , то середнє прискорення  $a_c = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ . Середнє прискорення не дає уявлення про дійсне прискорення у кожний даний момент часу (дійсне прискорення називають миттєвим). Дійсне прискорення – це границя, до якої прямує середнє прискорення при  $\Delta t$ , що прямує до нуля:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt},$$

Враховуючи, що  $V = \frac{dS}{dt}$ , дістаємо  $a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}$  (м/с<sup>2</sup>).

**Дійсне прискорення в прямолінійному русі дорівнює першій похідній швидкості за часом або другій похідній координати (відстані від початку відліку переміщення) за часом.**

Коли точка рухається по криволінійній траєкторії, то швидкість змінює свій напрям. Уявимо точку  $M$ , яка за час  $\Delta t$ , рухаючись по криволінійній траєкторії, перемістилась у положення  $M_1$  (рис. 3). Вектор приросту (зміни) швидкості позначимо  $\Delta V$ , тоді  $\Delta V = V_1 - V$ .

Щоб знайти вектор  $\Delta V$ , перенесемо вектор  $V_1$  у точку  $M$  і побудуємо трикутник швидкостей. Знайдемо вектор середнього прискорення:  $a_c = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ .

Вектор  $a_c$  паралельний вектору  $\Delta V$ , оскільки від ділення векторної величини на скалярну напрям вектора не зміниться.

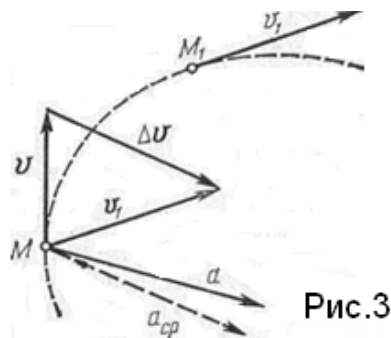


Рис.3

Вектор дійсного прискорення — це границя, до якої прямує відношення вектора приросту швидкості відповідного проміжку часу, коли він прямує до нуля,  $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$

Таку границю називають векторною похідною. Таким чином, *дійсне прискорення точки в криволінійному русі дорівнює векторній похідній швидкості за часом.*

З рис. 3 видно, що вектор прискорення в криволінійному русі завжди напрямлений у бік угнутості траєкторії.

Прискорення в криволінійному русі, якщо рух точки задано звичайним способом, визначається за теоремою про проекції прискорення на дотичну і нормаль.

Проекцію повного прискорення на нормаль до траєкторії називають *нормальним прискоренням*; проекцію повного прискорення на дотичну до траєкторії називають *дотичним прискоренням*; його іноді називають ще тангенціальним.

**Теорема.** *Нормальне прискорення  $a_n$  дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривизни траєкторії у даній точці, дотичне прискорення  $a_t$  дорівнює першій похідній швидкості за часом.*

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad a_t = \frac{dV}{dt},$$

Аналізуючи формули дотичного і нормального прискорень, можна побачити, що коли швидкість за модулем не змінюється, то  $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$ ; а коли швидкість не змінюється за напрямом (прямолінійний рух), то  $a_n = \frac{V^2}{\infty} = 0$ .

Виходить, що дотичне прискорення характеризує зміну швидкості лише за модулем, а нормальне – лише за напрямом.

Знаючи дотичне і нормальне прискорення, можна визначити модуль і напрям повного прискорення за формулами: модуль прискорення  $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ ; напрям прискорення  $\cos(a_t, a) = \frac{a_t}{a}$

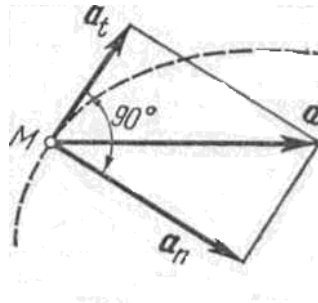


Рис. 4

Часто дотичне і нормальне прискорення розглядають не як проекції, а як *складові повного прискорення*, тобто як векторні величини. Коли осі взаємно перпендикулярні, то проекції вектора на ці осі і його складові, напрямлені по цих осях, рівні між собою за модулем. Дотичне, нормальне і повне прискорення показано на рис. 4.

Якщо  $a_t > 0$ , то вектори дотичного прискорення і швидкості напрямлені в один бік і тому рух буде прискореним. А коли  $a_t < 0$ , то вектор дотичного прискорення має протилежний до швидкості напрям і тому рух буде сповільненим. Вектор нормального прискорення завжди напрямлений до центра кривизни, тому це прискорення називають ще *доцентровим*.

### 3. Види руху точки залежно від прискорення.

Аналізуючи формули дотичного і нормального прискорень, можна зробити такі висновки:

1.  $a_t = \frac{dV}{dt} \neq 0$ ,  $a_n = \frac{V^2}{\rho} \neq 0$ , рух нерівномірний ( $V \neq \text{const}$ ), криволінійний ( $\rho \neq \infty$ );
2.  $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$ ,  $a_n = \frac{V^2}{\rho} \neq 0$ , рух рівномірний ( $V = \text{const}$ ), криволінійний ( $\rho \neq \infty$ );
3.  $a_t = \frac{dV}{dt} \neq 0$ ,  $a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$ , рух нерівномірний ( $V \neq \text{const}$ ), прямолінійний ( $\rho = \infty$ );
4.  $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$ ,  $a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$ , рух рівномірний прямолінійний.

Під час рівномірного руху дотичне прискорення  $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$ . Модуль швидкості точки в рівномірному русі – величина стала  $V = \frac{dS}{dt} = \text{const}$ . Звідси  $dS = V \cdot dt$ ,

інтегруючи цей вираз, дістаємо  $\int_S^{S_0} dS = \int_0^t V \cdot dt$ ,  $S - S_0 = V \cdot t$ ,

Остаточно формули рівномірного руху:  $V = \text{const}$ ,  $S = S_0 + V \cdot t$ .

В рівно змінному русі дотичне прискорення – величина стала:

$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} = \text{const}$ , звідси  $dV = a_t \cdot dt$ .

Інтегруючи цей вираз, дістаємо  $\int_V^{V_0} dV = \int_0^t a_t \cdot dt$ ,  $V - V_0 = a_t \cdot t$ .

Остаточно формула швидкості  $V = V_0 \pm a \cdot t$ .

Оскільки  $dS = V \cdot dt$ , інтегруючи цей вираз, дістаємо рівняння рівно змінного руху точки

$$\int_S^{S_0} dS = \int_0^t (V_0 + a \cdot t) \cdot dt, \quad S - S_0 = V_0 \cdot t + \frac{a_t \cdot t^2}{2}.$$

$V = V_0 \pm a \cdot t$ ;  $S = S_0 + V_0 \cdot t \pm \frac{a_t \cdot t^2}{2}$  - формули рівно змінного руху.

Якщо точка рухається криволінійно, то вона має нормальне прискорення

$a_n = \frac{V^2}{\rho}$ , а модуль повного прискорення визначається за формулою  $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ .

### Запитання для самоконтролю:

1. Що вивчає кінематика ?
2. Які існують системи відліку ?
3. Який рух називається рівномірним ?
4. Який рух називається рівнозмінним ?
5. Які є способи задання руху точки ?
6. Що називається швидкістю точки ?
7. Що називається прискоренням точки ?
8. Яке прискорення називається дотичним, а яке нормальним ?
9. Які існують види руху точки залежно від прискорення ?