Плоска система збіжних сил

План

1. Геометричний спосіб визначення рівнодіючої та геометрична умова рівноваги ПСЗС.
2. Проекція сили на вісь.
3. Аналітичний спосіб визначення рівнодіючої та аналітична умова рівноваги ПСЗС.

1. О.О. Ердеді “Технічна механіка” ст. 17-22.
2. Е.М. Никитин “Теоретическая механика” ст. 42-60.

1. *Системою збіжних сил* називаються сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

Система збіжних сил, лінії дії яких розміщені в одній площині, називається плоскою. Всі сили такої системи можна перенести вздовж ліній їх дій у спільну точку перетину цих ліній. Від цього дія даної системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, що випливає з другої аксіоми статики. Отже, будь-яка система збіжних сил може бути замінена еквівалентною системою сил, які прикладені в одній точці.

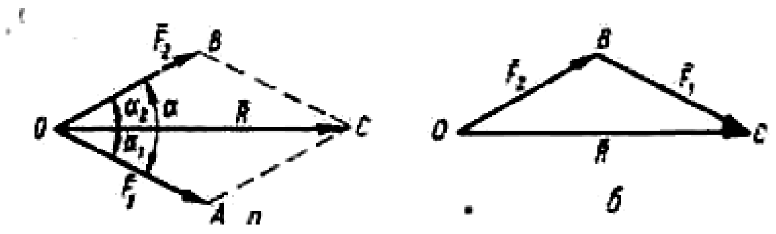


Рис. 1

Якщо на тіло діють дві _сили $\overline{F}_1$ та $\overline{F}_2$, які прикладені в одній точці О, то рівнодійна R цих сил дорівнює їх геометричній сумі (рис. 1):

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 \qquad (1)$$

Для знаходження рівнодійної двох сил $\overline{F}_1$ та $\overline{F}_2$, прикладених в одній точці О, не треба будувати весь паралелограм *OACB* (рис. 1), а досить побудувати один з трикутників *OBC* чи *OAC.* Для побудови, наприклад, трикутника *OBC* (рис. 1) потрібно з кінця вектора однієї сили ($\overline{F}_1$) провести вектор $\overline{BC}$, що дорівнює векторові другої сили ($\overline{F}_2$). Замикаюча сторона $\overline{OC}$ трикутника *OBC* зображає за модулем і за напрямом рівнодійну двох збіжних сил.

Трикутник *OBC (або OAC)* називають *силовим трикутником*, а такий спосіб додавання двох сил — *правилом трикутника*.

Якщо є кілька збіжних сил, то, застосовуючи послідовно правило додавання двох сил, роблять висновок, що *рівнодійна кількох збіжних сил також дорівнює їх геометричній сумі* (рис. 2):

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n = \sum_{k=1}^{n} F_k \qquad (2)$$

або

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} F_k \qquad (3)$$

тобто, щоб спростити запис, границі зміни індекса Σ іноді опускають.

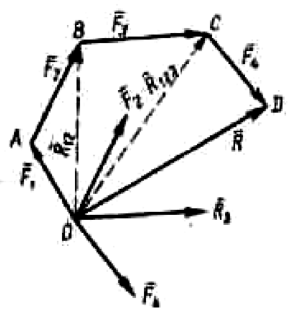


Рис. 2

Многокутник *OABCD,* сторони якого у вибраному масштабі дорівнюють даним силам і однаково з ними направлені, називається *силовим многокутником*. У силовому многокутнику стрілки завжди направлені одна за одною. Замикаюча сторона *OD* силового многокутника направлена завжди від початку першої сили до кінця останньої і за модулем та за напрямом у вибраному масштабі вона зображав рівнодійну даної системи збіжних сил. Правило додавання збіжних сил за способом многокутника є загальним для складання будь-яких векторів і називається *геометричним додаванням*.

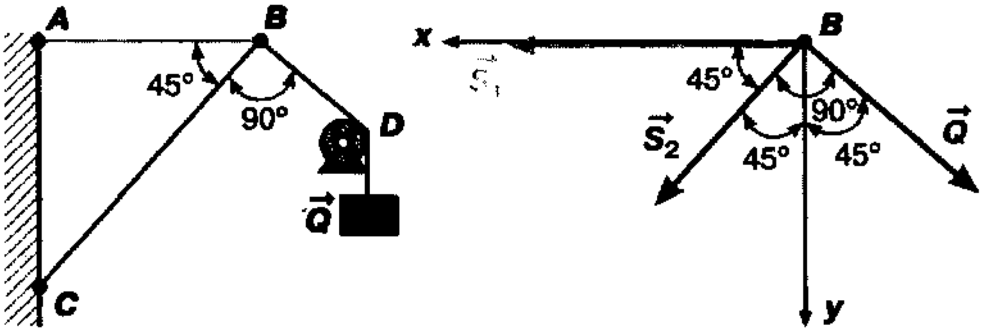
Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулю.

Згідно з двома способами визначення рівнодійної умова рівноваги плоскої системи збіжних сил може бути виражена у двох формах.

Умова рівноваги в геометричній формі. Сили $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$, лінії дії яких перетинаються в одній точці (рис. 6, *а*), будуть зрівноважені, очевидно, тоді коли їх рівнодійна $\overline{R}$ буде дорівнювати нулю. У такому випадку довжина замикаючої сторони силового многокутника повинна дорівнювати нулю, тобто силовий многокутник буде замкнутим (рис. 6, *б*). Отже, геометрична умова рівноваги збіжних сил, що лежать в одній площині, полягає в тому, щоб многокутник сил був замкнутим або інакше: *збіжні сили, що розміщені в одній, площині, перебувають у рівновазі, коли їх геометрична (векторна) сума дорівнюв нулю:*

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k = 0.$$

Методика розв'язування задач на рівновагу плоскої системи збіжних сил з використанням геометричної умови рівноваги

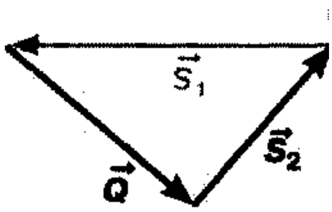


1 Виділяємо об'єкт рівноваги – тіло або точку, рівновагу якого у цій задачі потрібно розглянути.

2 Задані сили прикладаємо до виділеного об'єкта рівноваги.

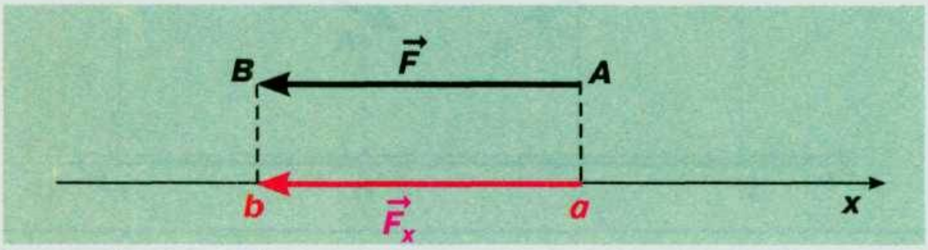
3 Відкидаємо в'язі і замінюємо їх дію відповідними реакціями.

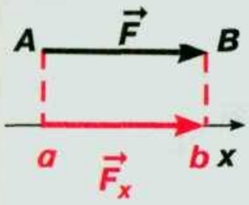
4 В масштабі будуємо силовий багатокутник. Якщо потрібно визначаємо невідомі зусилля.



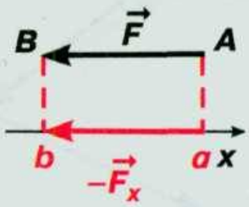
2.

Величина відрізка *ab*, взята зі знаком «+» або «–», називається проекцією сили $\vec{F}$ на вісь x і позначається $\vec{F}_x$.

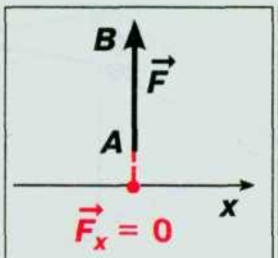




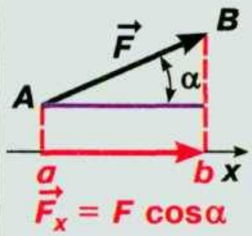
Проекцію вважають додатною, якщо напрями проекції та осі збігаються.



Проекцію вважають від'ємною, якщо напрям проекції протилежний напряму осі.

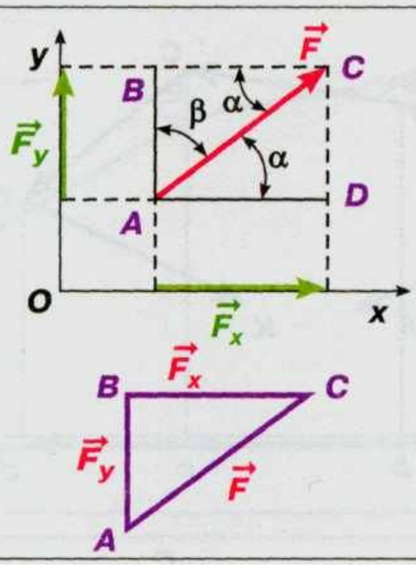


Проекція сили на вісь перетворюється на нуль тільки тоді, коли ця сила перпендикулярна до цієї осі.



Проекція сили на будь-яку вісь дорівнює добутку значення цієї сили на косинус кута між напрямами сили й осі.

Проекції сили на дві взаємно перпендикулярні осі



Проекції сили $\vec{F}$ на осі x та y дорівнюють:

$$F_x = F\cos\alpha;$$

$$F_y = F\cos\beta = F\sin\alpha.$$

Значення сили $\vec{F}$ визначають з $\triangle$ ***ABC*** за теоремою Піфагора:

$$\boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$$

$$\cos\alpha = F_x/F;$$

$$\cos\beta = \sin\alpha = F_y/F.$$

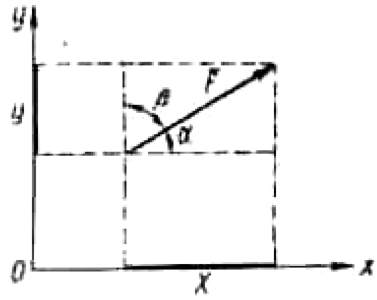


Рис. 4

Із рис. 4 видно, що залежність між проекцією і величиною проектованої сили визначається рівністю

$$X = F\cos\alpha \tag{4}$$

де α — кут між силою і додатним напрямом осі.

Очевидно, при α < 90° і α > 270° проекція сили на вісь буде додатною, а при 90° < α < 270° — від'ємною. Якщо α = 90° або α = 270°, то проекція сили на вісь дорівнює нулю, оскільки сила $\overline{F}$ перпендикулярна до осі. Величину сили $\overline{F}$ можна знайти за її проекцією на дві взаємно перпендикулярні осі (*x* та *y*), користуючись теоремою Піфагора (рис. 4):

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2}. \tag{5}$$

Лінію дії і напрям сили визначають за допомогою косинусів кутів між силою і додатними напрямами осей проекцій:

$$\cos\alpha = \frac{X}{F};. \qquad \cos\beta = \frac{Y}{F}. \tag{6}$$

3. Аналітичний спосіб додавання сил. Доведемо таку теорему: *проекція рівнодійної на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на цю саму вісь.*

Нехай з сил побудовано силовий многокутник *ABCDE* (рис. 5), в якому рівнодійна зображена вектором $\overline{R} = \overline{A}\overline{E}$.

Опустимо перпендикуляри на вісь L із усіх вершин цього многокутника. Тоді, позначивши проекції сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ на вісь L відповідно через $\overline{F}_{L1}, \overline{F}_{L2}, \overline{F}_{L3}, \overline{F}_{L4}$, будемо мати:

$$F_{1L} = ab;$$

$$F_{2L} = -bc;$$

$$F_{3L} = cd;$$

$$F_{4L} = -de.$$

Відрізки bc і de від'ємні, оскільки вони направлені в бік, протилежний напрямові осі проекцій.

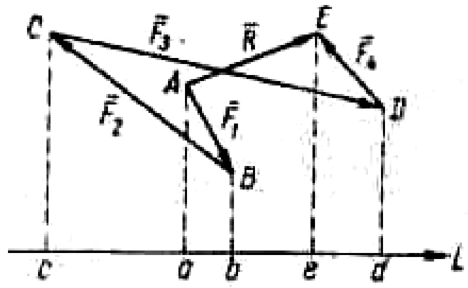


Рис.5

Очевидно, що $F_{1L} + F_{2L} + F_{3L} + F_{4L} = ab - bc + cd - de.$

З рис. 2 видно, що $ab - bc = -ac$; $-ac + cd = ad$; $ad - de = ae$. Але ae є проекцією рівнодійної $\overline{R} = \overline{A}\overline{E}$ на вісь L. Позначивши проекцію рівнодійної $\overline{R}$ на вісь L через R_L будемо мати:

$$F_{1L} + F_{2L} + F_{3L} + F_{4L} = R_L.$$

Отже, теорема доведена.

Якщо віссю проекцій буде вісь Ox, а проекції складових сил на цю вісь позначити через $X_1, X_2, ...X_n$, то проекція рівнодійної на цю саму вісь буде дорівнювати:

$$X = X_1 + X_2 +,,, + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k. \tag{7}$$

Тут знаком Σ позначаємо суму n складових сил.

Спроектувавши цю саму систему сил на вісь Oy, перпендикулярну осі Ox, і застосувавши відповідні позначення, дістанемо:

$$Y = Y_1 + Y_2 +,,, + Y_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k. \tag{8}$$

Підставивши у формули (5) і (6) вирази (7) і (8) дістанемо такі формули для визначення рівнодійної сили:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2}. \tag{9}$$

$$\cos(\overline{F}, x) = \frac{X}{F};. \qquad \cos(\overline{F}, y) = \frac{Y}{F}. \qquad (10)$$

Умова рівноваги в аналітичній формі. Аналітично величина рівнодійної визначається за формулою (5):

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Але коли R = 0, то нулю дорівнює і вираз під коренем, а це можливо тоді, коли кожна складова під коренем дорівнює нулю, тобто

$$\sum X_k = 0; \qquad \sum Y_k = 0. \qquad (11)$$

Ці рівняння називаються рівняннями рівноваги плоскої системи збіжних сил.

Отже, *для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на кожну з двох координатних осей, що лежать у площині дії сил, дорівнювали нулю.*

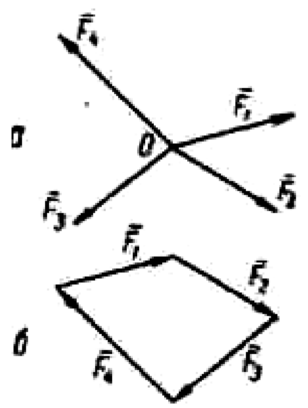
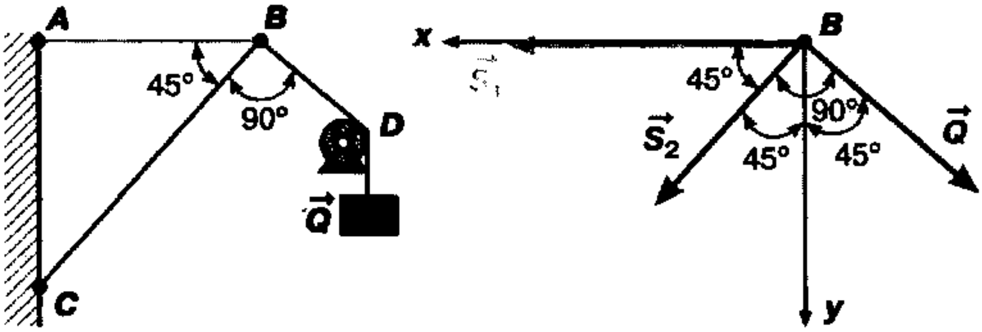


Рис. 6

Методика розв'язування задач на рівновагу плоскої системи збіжних сил з використанням аналітичної умови рівноваги



1 Виділяємо об’єкт рівноваги – тіло або точку, рівновагу якого у цій задачі потрібно розглянути.

2 Задані сили прикладаємо до виділеного об’єкта рівноваги.

3 Відкидаємо в’язі і замінюємо їх дію відповідними реакціями.

4 Вибираємо координатні осі і складаємо рівняння рівноваги.

5 Складені рівняння розв’язуємо відносно відомих величин.

Питання для самоконтролю

1. За якими формулами визначають модуль і напрям рівнодіючої системи збіжних сил?

2. Відомо, що сума проекцій просторової системи збіжних сил на осі Ox і Oy прямокутної координатної системи Oxyz дорівнює нулю. Що можна сказати про рівнодіючу цієї системи сил?

3. Відомо, що сума проекцій плоскої системи збіжних сил на горизонтальну вісь Ox дорівнює нулю. Що можна сказати про рівнодіючу цієї системи сил?

4. У певній точці тіла прикладені три, рівні за модулем, сили, які розташовані в одній площині під кутом 120° одна до одної. Чому дорівнює рівнодіюча цих сил? Розв'язати питання геометрично і аналітично.

5. Сформулюйте умови рівноваги плоскої системи збіжних сил в геометричній та аналітичній формах.

6.Із побудованих силових трикутників вибрати трикутник побудований для точки A.