

Додавання сил

План

1. Способи додавання сил.
2. Вибір осей координат.

Мета роботи: Вивчити способи додавання сил.

Опорний конспект

Припустимо, що до твердого тіла в точках A, B, C, D включені сили F_1, F_2, F_3, F_4 , лінії дії яких перетинаються в точці O (рис.1.16 а). Перенесемо сили вздовж їх ліній дії в точку O і знайдемо їх рівнодіючу. Для визначення величини і напрямки рівнодіючої будемо послідовно складати сили за правилом силового трикутника (рис.1.16, б). Спочатку знайдемо рівнодіючу R^*_1 сил F_1 і F_2 , потім R^*_2 сил R^*_1 і F_3 і т.д. Отримаємо наступне: $R^*_1 = F_1 + F_2, R^*_2 = R^*_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3, R^* = R^*_2 + F_4 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

Зробивши побудова, бачимо, що проведення проміжних векторів R^*_1, R^*_2 було зайвим, можна було, відклавши вектор F_1 , до кінця його докласти вектор, рівний F_2 , потім до кінця F_2 - вектор, рівний F_3 , і т.д. Рівнодіюча R^* з'єднує початок першого вектора з кінцем останнього. Отримана фігура називається силовим багатокутником.

Таким чином, рівнодіюча системи збіжних сил дорівнює геометричній сумі цих сил, лінія дії її проходить через точку перетину ліній дії доданків сил. Щоб знайти рівнодіючу сходяться сил геометричним способом, треба побудувати в точці перетинань їх ліній дії силовий багатокутник на доданків силах; вектор R^* , що з'єднує початок першої сили з кінцем останньої (тобто замикає сторона силового багатокутника), є рівнодіючої. В окремому випадку рівнодіюча трьох збіжних сил, які не лежать в одній площині, зображується діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на цих силах (правило паралелепіпеда). Якщо сили взаємно перпендикулярні, то паралелепіпед буде прямокутним (рис.1.17). Оскільки сходяться система сил може бути замінена однією силою - рівнодіючої, то необхідною умовою рівноваги тіла під дією сходяться сил є рівність нулю цієї рівнодіючої.

(1.7)

Геометричне умова рівноваги сходяться сил формулюється так: для рівноваги системи збіжних сил необхідно, щоб їх геометрична сума дорівнювала нулю, тобто щоб силовий багатокутник, побудований на доданків силах, був замкнений.

Теорема. Якщо вільне тверде тіло перебуває в рівновазі під дією 3-х непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дії сил перетинаються в одній точці.

Доказ

Нехай на тіло діють 3 непаралельних сили F_1, F_2, F_3 , що лежать в одній площині та додані в точках A_1, A_2, A_3 (рис.1.18). Так як сили не паралельні, то, принаймні, лінії дії двох з них перетинаються в одній точці (точка O).

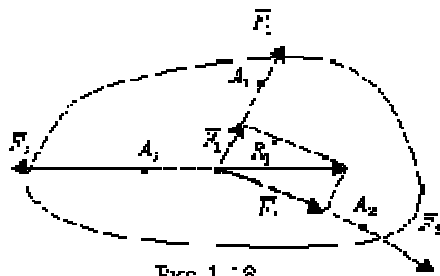


Рис. 1.18

Знайдемо їх рівнодіючу R_1^* :

$$R_1^* = F_1 + F_2.$$

Лінія дії рівнодіючої R_1^* пройде через точку О. Сила R_1^* повинна врівноважуватися силою F_3 , а це можливо лише в тому випадку (див. аксіому 1), коли вони рівні за величиною і спрямовані вздовж однієї прямої в протилежні сторони. Отже, лінія дії сили F_3 пройде через точку перетину ліній дії сил F_1 і F_2 , що потрібно було довести.

Зауваження. Три сходяться сили, не лежать в одній площині, перебувати в рівновазі не можуть, так як завжди існує їх рівнодіюча, яка визначиться як діагональ

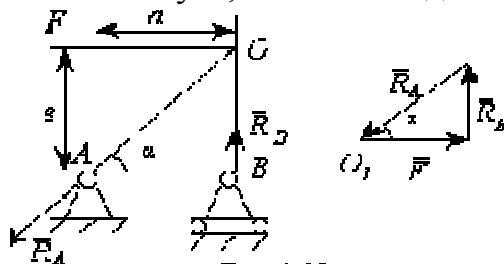


Рис.1.19

паралелепіпеда, побудованого на цих силах.

Приклад. Визначити реакції двохарнірної арки, якщо на неї діє сила F . Опора в точці А - шарнірнонеподвіжна, а в точці В - шарнірна на ковзанках. Розміри вказані на рис.1.19.

Рішення

Лінію дії реакції опори У проводимо перпендикулярно до поверхні кочення ковзанок. Для визначення лінії дії реакції опори А застосуємо теорему про 3-х силах. Так як лінії дії сил F і R_B перетинаються в точці О, то і лінія дії сили R_A повинна пройти через цю точку. З точки O_1 відкладаємо силу F , з кінця якої проводимо лінію паралельну R_B , а з початку лінію паралельну R_A , отримаємо силувий трикутник. Напрямок сил R_A і R_B показуємо, виходячи з умови замкнутості силового трикутника.

Питання для самоконтролю

1. Як здійснити додавання n-ї кількості сил?
2. Як впливає вибір осей проекції на визначення рівнодіючої чи реакцій стержнів?

Література

1. О.О. Ердеди "Технічна механіка" ст. 19-21.
2. Е.М.Никитин "Теоретическая механика" ст. 54-58

Головний вектор і головний момент просторової системи сил

План

1. Головний вектор і головний момент ПСДРС.
2. Рівняння рівноваги просторової системи довільно розміщених сил.

Мета роботи: Вивчити поняття просторової системи довільно-розміщених сил.

Опорний конспект

Величини і напрямки головних векторів $\bar{F}_0$ і $\bar{M}_0$ у системі координат $Oxyz$ (рис. 4) визначаються за правилами векторної алгебри формулами

$$F_0 = \sqrt{F_{0x}^2 + F_{0y}^2 + F_{0z}^2}; \quad M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}, \quad (8)$$

$$\text{де} \quad F_{0x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad F_{0y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad F_{0z} = \sum_{k=1}^n F_{kz};$$

$$M_{0x} = \sum_{k=1}^n M_{0x}(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}); \quad M_{0y} = \sum_{k=1}^n M_{0y}(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (z_k F_{kx} - x_k F_{kz});$$

$$M_{0z} = \sum_{k=1}^n M_{0z}(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (x_k F_{ky} - y_k F_{kx});$$

$$\cos(\widehat{Ox, \bar{F}_0}) = \frac{F_{0x}}{F_0}; \quad \cos(\widehat{Oy, \bar{F}_0}) = \frac{F_{0y}}{F_0}; \quad \cos(\widehat{Oz, \bar{F}_0}) = \frac{F_{0z}}{F_0};$$

$$\cos(\widehat{Ox, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0x}}{M_0}; \quad \cos(\widehat{Oy, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0y}}{M_0}; \quad \cos(\widehat{Oz, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0z}}{M_0}.$$

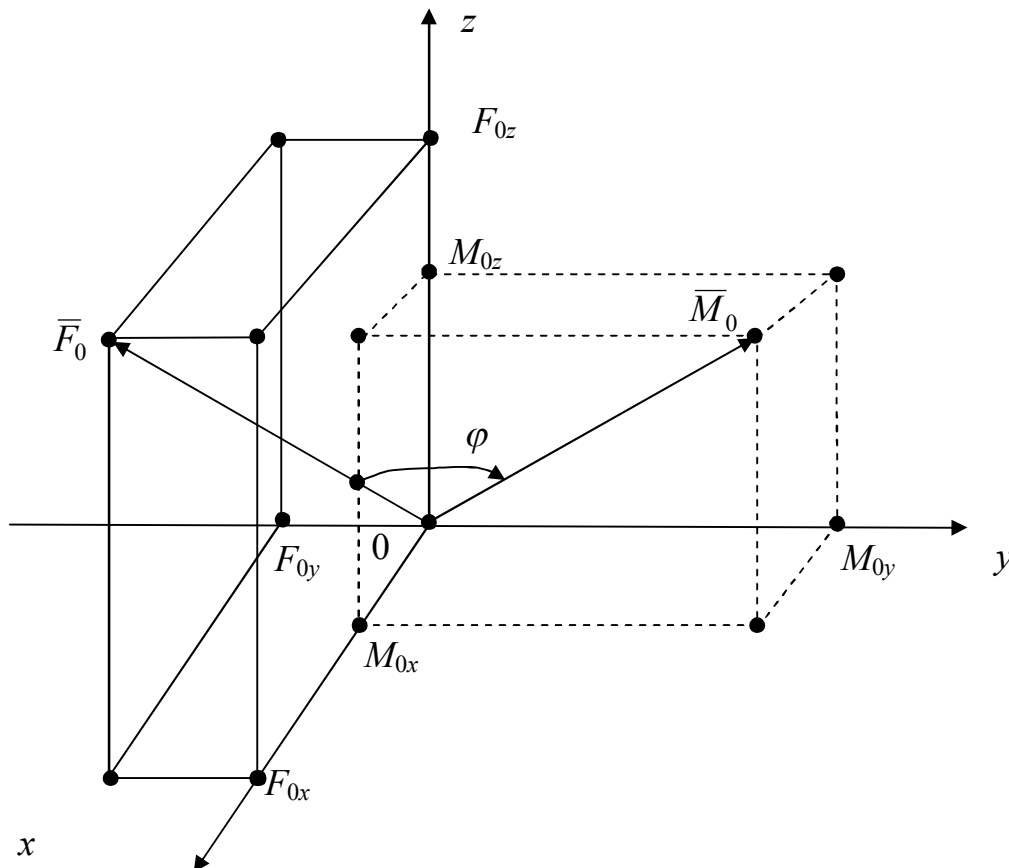


Рис. 4

Кут φ між векторами $\vec{F}_0$ і $\vec{M}_0$ визначається за допомогою формули їх скалярного добутку:

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0}{F_0 \cdot M_0} = \arccos \frac{F_{0x} \cdot M_{0x} + F_{0y} \cdot M_{0y} + F_{0z} \cdot M_{0z}}{F_0 \cdot M_0}.$$

Якщо на практиці при вирішенні задач рівноваги твердого тіла виникає питання зміни центра приведення системи сил з точки O у наперед задану точку O_1 , то головний вектор, головний момент і момент результуючої приєднаної пари системи сил мають наступні властивості.

Враховуючи вирази (2), (8) є очевидним, що головний вектор системи сил ні за величиною, ні за напрямком не залежить від положення центра приведення, тобто завжди виконуватиметься рівність $\vec{F}_{O_1} = \vec{F}_O$ (точка O_1 - новий центр приведення). Це обумовлено тим, що за формулою визначення ($\vec{F}_O = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$) головний вектор є функцією тільки параметрів сил початкової системи і не залежить від положення точки O на тілі.

У механіці головний вектор $\vec{F}_O$ називається *першим статичним інваріантом*. Це означає, що для будь-якої вихідної системи сил його величина і напрямок є сталими величинами, тобто незалежними (інваріантними) до вибору центра приведення:

$$\vec{F}_O = \vec{F}_{O_1} = \dots = \vec{F}_{O_n},$$

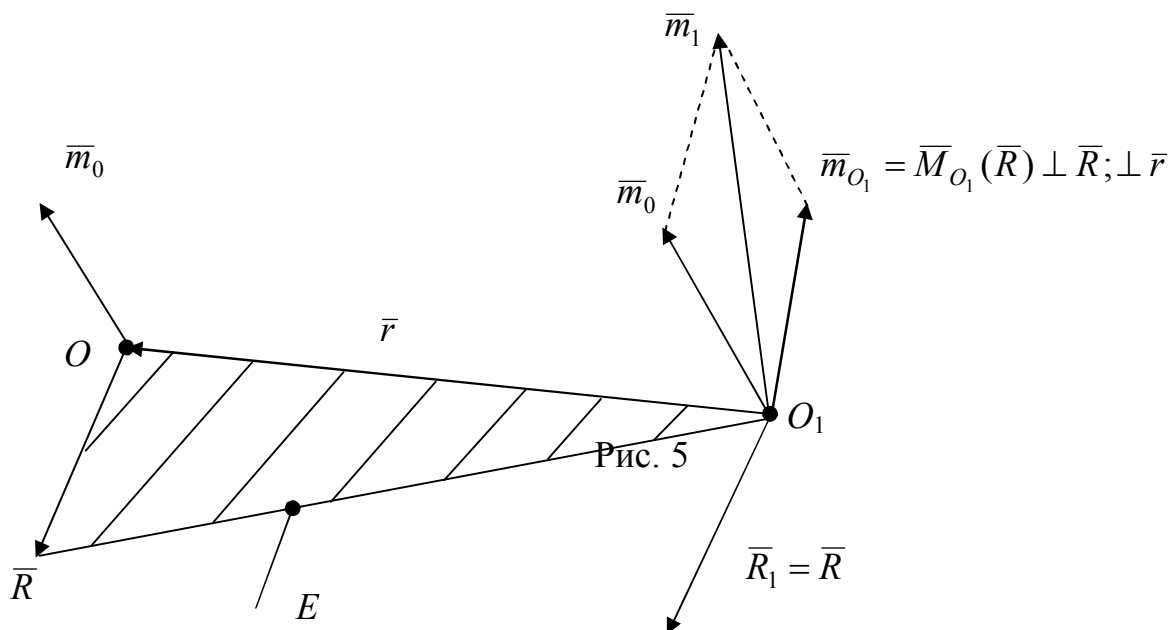
де n - номер поточної точки приведення.

Момент результуючої приєднаної пари вихідної системи сил при перенесенні центра приведення буде визначатися (рис. 5) за формулою

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_O + \vec{m}_{O_1}, \quad (9)$$

де $\vec{m}_{O_1} = \vec{r} \times \vec{R}$ - момент приєднаної пари сил.

На рис. 5 вектор $\vec{m}_{O_1}$ є, за правилом векторного добутку, перпендикулярним що площини E , якій належать вектори $\vec{r}$ і $\vec{R}$, тобто $\vec{m}_{O_1} \perp \vec{R}; \perp \vec{r}$.



Вираз (9) отримано за допомогою наступних еквівалентних системних перетворень:

$$(\bar{R}, \bar{m}_O) \sim (\bar{R}_1, \bar{m}_O, \bar{m}_{O_1} = \bar{M}_{O_1}(\bar{R})) \sim (\bar{R}_1, \bar{m}_1),$$

де $\bar{R}_1 = \bar{R}$.

При цьому використано лему про паралельне перенесення сили $\bar{R}$ в точку O_1 з одночасним додаванням у центрі O_1 пари сил з моментом $\bar{m}_{O_1}$, рівним моменту $M_{O_1}(\bar{R})$ вихідної сили $\bar{R}$ відносно точки O_1 , а також враховано властивості моменту $\bar{m}_O$ (моменту приєднаної пари сил у точці O) як вільного вектора, який можна переносити паралельно самому собі в будь-яку точку тіла (в даному випадку з точки O у точці O_1). Крім того, використано властивості геометричного додавання векторів моментів пар сил у точці O_1 , тобто:

$$\bar{m}_1 = \bar{m}_O + \bar{m}_{O_1}. \quad (10)$$

З рівняння (10) виходить, що момент $\bar{m}_O$ приєднаної пари сил при перенесенні центра приведення змінюється на величину моменту $\bar{m}_{O_1}$ пари сил, рівному моменту сили $\bar{R}$ відносно нового центра приведення O_1 .

Головний момент системи сил при перенесенні центра приведення вихідної системи сил матиме, в свою чергу, наступну властивість.

Враховуючи вираз (3) і рис. 6, отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{O_1} &= \sum_{k=1}^n \bar{r}_{k_1} \times \bar{F}_k = \sum_{k=1}^n (\bar{O_1O} + \bar{r}_k) \times \bar{F}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k + \bar{O_1O} \times \left(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \right) = \\ &= \bar{M}_O + \bar{O_1O} \times \bar{F}_O = \bar{M}_O + \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O). \end{aligned} \quad (11)$$

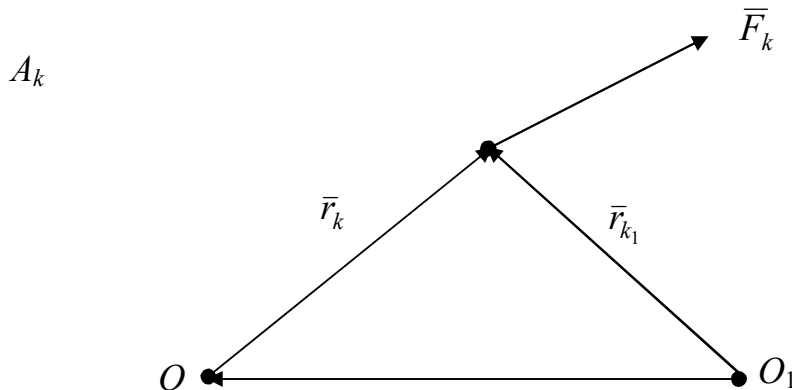


Рис. 6

З рівняння (11) випливає, що головний момент вихідної системи сил при перенесенні центра приведення до точки O_1 змінюється на величину моменту $\bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O)$ головного вектора $\bar{F}_O$ відносно нового центра приведення O_1 .

Враховуючи рівняння (5) і (7) отримаємо вирази:

$$\begin{aligned} \bar{m}_O + \bar{m}_{O_1} &= \bar{M}_O + \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O), \\ \bar{m}_{O_1} &= \bar{M}_{O_1}. \end{aligned} \quad (12)$$

З виразу (12) випливає рівність моментів результуючої пари і головного моменту системи сил відносно нового центра зведення O_1 , а також справедливості приведених на рис. 7 системних перетворень.

Однак, на практиці виявилось, що більш зручним у використанні є рівняння (11), яке стосується головного моменту системи сил.

Розглянемо далі інші властивості головного вектора $\bar{F}_O$ і головного моменту $\bar{M}_O$ системи сил, які мають суттєве теоретичне і практичне значення.

Важливою властивістю головних вектора $\bar{F}_O$ і моменту $\bar{M}_O$ системи сил є незалежність їх скалярного добутку від положення точки приведення на тілі.

Дійсно, для будь-якої точки приведення O_1 отримаємо:

$$\bar{F}_{O_1} \cdot \bar{M}_{O_1} = \bar{F}_{O_1} \cdot (\bar{M}_O + \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O)) = \bar{F}_{O_1} \cdot \bar{M}_O + \bar{F}_{O_1} \cdot \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O). \quad (13)$$

За визначенням вектор $\bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O)$ і вектор $\bar{r}$ (рис. 7) є перпендикулярними. Тому формула (13) приводиться, враховуючи що $\cos 90^\circ = 0$, до виду

$$\bar{F}_{O_1} \cdot \bar{M}_{O_1} = \bar{F}_{O_1} \cdot \bar{M}_O + F_{O_1} \cdot M_{O_1}(\bar{F}_O) \cdot \cos 90^\circ = \bar{F}_{O_1} \cdot \bar{M}_O. \quad (14)$$

Вираз (14), в результаті незалежності головного вектора системи сил від зміни полюса приведення, перетворюється у рівність

$$\bar{F}_{O_1} \cdot \bar{M}_{O_1} = \bar{F}_O \cdot \bar{M}_O, \quad (15)$$

яка і доводить зазначену властивість.

У механіці цю властивість скалярного добутку головного вектора і головного моменту системи сил визначають як *другий статичний інваріант (перша форма)*.

Розглянемо другу форму другого статичного інваріанта системи діючих на тіло сил, які зведено в центрі O до головного вектора $\bar{F}_O$ і головного моменту $\bar{M}_O$.

З векторної алгебри відомо, що за величиною скалярний добуток двох векторів може бути визначеним через проекцію одного з векторів добутку на напрямок іншого:

$$\bar{F}_O \cdot \bar{M}_O = F_O \cdot M_O \cdot \cos(\bar{F}_O, \bar{M}_O) = \bar{F}_O \cdot \text{Pr}_{\bar{F}_O}(\bar{M}_O), \quad (16)$$

де $\text{Pr}_{\bar{F}_O}(\bar{M}_O) = \widehat{\bar{M}_O \cos(\bar{F}_O, \bar{M}_O)}$ - проекція вектора $\bar{M}_O$ на напрямок головного вектора $\bar{F}_O$.

Тоді з формул (15), (16) випливає вираз

$$\bar{F}_{O_1} \cdot \text{Pr}_{\bar{F}_{O_1}}(\bar{M}_{O_1}) = \bar{F}_O \cdot \text{Pr}_{\bar{F}_O}(\bar{M}_O),$$

який, з урахуванням рівності $\bar{F}_{O_1} = \bar{F}_O$ першого статичного інваріанта, перетворюється до вигляду

$$\text{Pr}_{\bar{F}_{O_1}}(\bar{M}_{O_1}) = \text{Pr}_{\bar{F}_O}(\bar{M}_O). \quad (17)$$

Співвідношення (17) виявляє, що проекція головного моменту систем сил на напрямок її головного вектора не залежить від положення точки приведення. У механіці цю властивість визначають як *другий статичний інваріант (друга форма)*.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте умову рівноваги просторової системи довільно-розміщених сил?
2. Дайте визначення головного вектора і головного моменту ПСДРС?

Література

1. О.О. Ердеди "Технічна механіка" ст. 29-32.
2. Е.М.Никитин "Теоретическая механика" ст. 118-124

Статична стійкість

План

1. Стійка рівновага.

Мета роботи: Вивчити поняття стійкої рівноваги.

Опорний конспект

Статична стійкість положення рівноваги твердого тіла

Положення статичної рівноваги твердого тіла називають стійким, якщо при невеликих відхиленнях тіла від цього положення, момент який повертає тіло в положення рівноваги, буде більшим за збурюючий момент, що відхиляє тіло від цього положення.

Якщо тверде тіло не прикріплене до основи, то умова його статичної рівноваги така, що сила ваги не повинна виходити за межі основи (рис. 1).

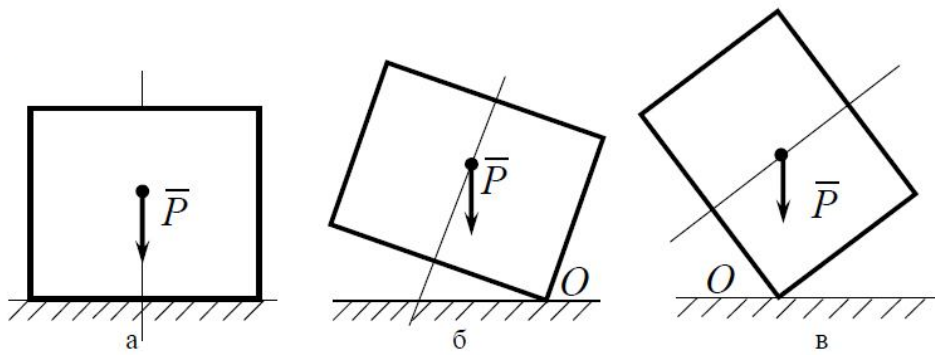


Рисунок 1

Питання для самоконтролю

1. Що таке статична стійкість?
2. Від чого залежить стійкість тіла?

Література

1. О.О. Ердеди "Технічна механіка" ст. 56-57.
2. Е.М. Никитин "Теоретическая механика" ст. 157-160

Види руху точки

План

1. Рівняння руху точки.
2. Кінематичні графіки.

Мета роботи: Вивчити види руху точки і поняття про кінематичні графіки.

Опорний конспект

Як уже було встановлено, в рівнозмінному русі дотичне прискорення — величина стала:

$$a_t = dv/dt = d^2s/dt^2 = \text{const.}$$

Звідси

$$dv = a_t dt$$

Інтегруючи цей вираз, дістаємо:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_t dt, \quad v - v_0 = a_t t$$

де v_0 — початкова швидкість. Остаточна формула швидкості

$$v = v_0 + a_t t$$

Оскільки

$$ds = v dt$$

інтегруючи цей вираз, дістаємо формулу переміщень (відстаней від початкового положення)

$$s - s_0 = v_0 t + a_t t^2 / 2$$

де s_0 — початкова відстань. Припускаючи, що $s_0 = 0$, записуємо формули рівнозмінного руху точки:

$$a_t = \text{const}, \quad v = v_0 + a_t t, \quad s = v_0 t + a_t t^2 / 2.$$

Якщо точка рухається криволінійно, то вона має нормальне прискорення, а модуль повного прискорення визначиться за формулою:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Коли ж точка рухається прямолінійно, то $a_n = 0$, а повне прискорення дорівнює дотичному: $a = a_t$.

У рівноприскореному русі напрям вектора прискорення збігається з напрямом вектора швидкості; у рівносповільненому русі вектор прискорення напрямлений протилежно до вектора швидкості. Формулу переміщень (відстаней від початку відліку) перетворимо, виключивши з неї час t . З формули швидкості маємо

$$t = (v - v_0) / a_t$$

тоді

$$s = v_0 (v - v_0 / a_t) + a_t / 2 (v - v_0 / a_t)^2$$

Після перетворень дістанемо

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_t}$$

У деяких випадках під час розв'язування задач зручно користуватися формулою переміщень рівномірного руху дещо в іншому вигляді. Оскільки

$$s = v_c t, \quad \text{то} \quad s = \frac{v_0 - v}{2} t$$

Графіки прискорення, швидкості і переміщення точки для прямолінійного рівномірного руху подано на **рис.** Крива переміщень під час рівнозмінного руху є параболою. З вищої математики відомо, що в будь-якій точці графіка функції $y = f(x)$

$$dy/dx = \operatorname{tg} \alpha$$

де α — кут між дотичною до кривої у даній точці і додатним напрямом осі абсцис.

З викладеного випливає, що коли дотична до кривої переміщень утворює гострий кут з додатним напрямом осі часу, то в цей момент

швидкість точки додатна; коли ж кут тупий, то швидкість точки в цей момент від'ємна. Якщо дотична в якійсь точці кривої переміщень паралельна осі часу, то швидкість точки в цей момент дорівнює нулю (рис. 9.12).

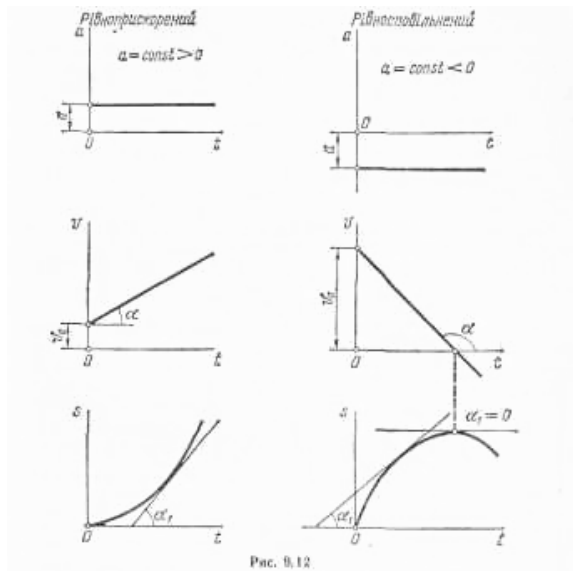
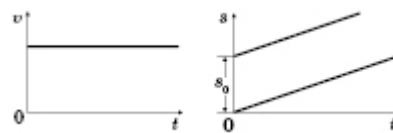


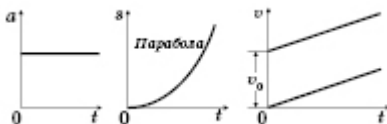
Рис. 9.12

Графіки залежності кінематичних величин від часу в рівномірному і рівноприскореному рухах

Рівномірний рух ($v = \text{const}$)



Рівноприскорений рух ($a = \text{const}$)



1. Які види рухів Ви знаєте?
2. Що таке рівнозмінний рух?

Література

1. О.О. Ердеди “Технічна механіка” ст. 70-71.
2. Е.М. Никитин “Теоретическая механика” ст. 189-191

Лінійна швидкість і прискорення при обертальному русі

Мета роботи: Вивчити поняття лінійної швидкості і прискорення при обертальному русі тіла.

Опорний конспект

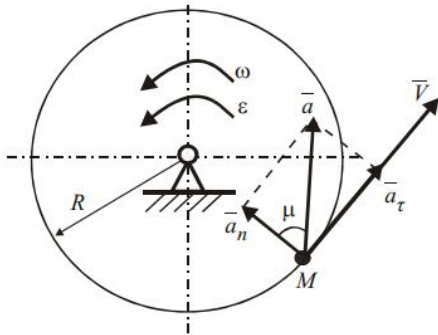
Траєкторії, швидкості і прискорення точок тіла що обертається.

При обертанні тіла навколо нерухомої осі всі його точки описують кола, що лежать в площинах перпендикулярних до осі обертання z . Центри цих кіл лежать на осі обертання і відповідно, радіус кожної із них рівний відстані відповідної точки до осі обертання.

Знаючи кутову швидкість ω тіла і відстань r якої небудь точки M тіла від осі обертання, можна знайти і швидкість v цієї точки (вимірюється в лінійних одиницях і наз. лінійною).

Пройшовши відстань по дузі від M до M' отримаємо Δs .

Відомо, що $v = \lim \Delta s / \Delta t = ds/dt$



Однак довжина дуги по якій рухається точка рівна $\Delta s = r\Delta\phi$ підставивши Δs отримаємо:

$$v = \lim \Delta s / \Delta t = \lim r$$

$$\Delta\phi / \Delta t = r \lim \Delta\phi / \Delta t = r d\phi/dt = r\omega;$$

Числове значення швидкості точки обертального тіла рівна добутку кутової швидкості тіла на відстань даної точки від осі обертання:

$$v = r\omega$$

Направлений вектор v швидкості по дотичній до траєкторії руху точки, тобто перпендикулярно до її радіуса обертання в бік обертання точки.

$$v = r\omega = d/2 \cdot \pi n / 30 = \pi n d / 60$$

Прискорення точки, що обертається, як і прискорення точки, що рухається по криволінійній траєкторії, може бути розкладене на дотичне a_t і нормальне a_n .

$$a_t = dv/dt = dr\omega/dt = r d\omega/dt = r\epsilon; \quad a_n = v^2/\rho = r\omega^2 = r^2\omega^2/r = r\omega^2;$$

Чисельно значення дотичного прискорення точки тіла, що обертається рівна добутку кутового прискорення тіла на відстань даної точки від осі обертання:

$$a_t = r\epsilon$$

Чисельне значення нормального прискорення точки тіла, що обертається рівна квадрату кутової швидкості тіла, помноженому на відстань даної точки від осі обертання:

$$a_n = r\omega^2$$

1. Які види рухів Ви знаєте?
2. Що таке рівнозмінний рух?

Література

1. О.О. Ердеди “Технічна механіка” ст. 70-71.
2. Е.М. Никитин “Теоретическая механика” ст. 189-191

Теорема додавання швидкостей

Мета роботи: Вивчити поняття лінійної швидкості і прискорення при обертальному русі тіла.

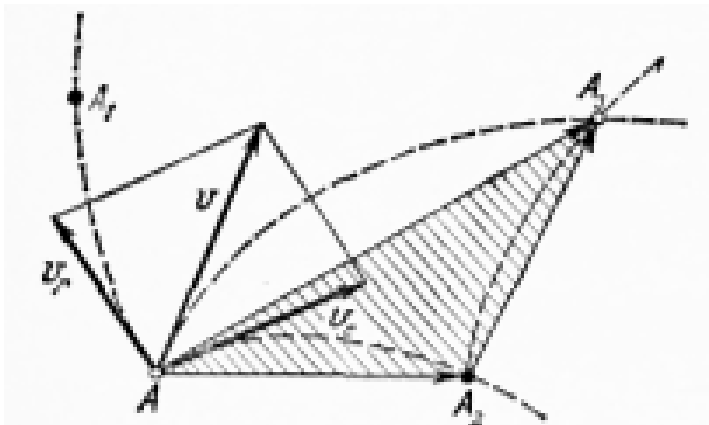
Опорний конспект

Швидкість точки в абсолютному русі називають **абсолютною**. Швидкість точки в відносному русі називають **відотною**. Швидкість розглядуваної точки, уявно закріпленої у даній моментній рухомій системі координат, називають **переносною**.

Домовимося позначати абсолютну швидкість точки прийнятим раніше символом v , а відносну і переносну швидкості цим же символом, але з відповідним підстрочним індексом: відн. – для відносного руху і пер. – для переносного руху.

Абсолютною швидкістю v даної точки називається її швидкість по відношенню до нерухомої системи відліку.

Відотною швидкістю $v_{\text{відн.}}$ даної точки називається її швидкість по відношенню до рухомої системи відліку.



Зв'язок між цими швидкостями визначається теоремою про додавання швидкостей.

Теорема. Абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі відносної і переносної швидкостей.

Нехай за час Δt точка перейшла з положення A в положення A_3 , рухаючись по траєкторії абсолютного руху, тобто по дузі AA_3 (рис. 11.3). Коли б рух був лише відносним, то точка перейшла б у положення A_1 ; а коли б рух був лише переносним, то точка перейшла б у положення A_2 . Можна уявити, що точка A перейшла в положення A_3 , рухаючись спочатку лише по траєкторії переносного руху (дуга AA_2), а потім лише по траєкторії відносного руху (дуга A_2A_3 , яка дорівнює дузі AA_1).

Сполучивши точки A, A_2 і A_3 хордами, дістанемо таку залежність між векторами зміщення точки A :

$$\Delta A_3 = \Delta A_2 + \Delta A_3.$$

Поділимо всі члени рівності на Δt і перейдемо до границі, коли Δt прямує до нуля,

$$\text{звідси } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_3}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_2}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_3}{\Delta t}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{пер}} + \mathbf{v}_{\text{від}}$$

де $\mathbf{v}$ — вектор абсолютної швидкості; $\mathbf{v}_{\text{пер}}$ — вектор переносної швидкості; $\mathbf{v}_{\text{від}}$ — вектор відносної швидкості. Теорему доведено.

Оскільки при геометричному складанні двох швидкостей точки її результуючої зображається діагоналлю паралелограма, побудованої на швидкостях як на сторонах і дану теорему будуть називати *правилом паралелограма*.

Якщо відомий модуль відносної і переносної швидкостей і кут α між ними то модуль абсолютної швидкості знаходиться на основі теореми косинусів.

$$v = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{від}}^2 + 2v_{\text{пер}}v_{\text{від}}\cos\alpha}$$

якщо напрямки переносного і відносного руху перпендикулярні один до одного $\alpha = 90^\circ \cos\alpha = 0$ і $v = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{від}}^2}$ Якщо відносний і переносний рух напрямлені в один бік, то $\alpha = 0^\circ \cos\alpha = 1$ і $v = v_{\text{пер}} + v_{\text{від}}$

Якщо переносний і відносний рух напрямлені по одній прямій в різні сторони, то $\alpha = 180^\circ \cos\alpha = -1$ і $v = |v_{\text{пер}} - v_{\text{від}}|$ тобто в цьому випадку абсолютна швидкість точки рівна по модулю абсолютному значенню різниці між переносною і відносною швидкістю і направлена в бік більшої.

3. Які види рухів Ви знаєте?
4. Що таке рівнозмінний рух?

Література

1. О.О. Ердеді “Технічна механіка” ст. 70-71.

2. Е.М. Никитин “Теоретическая механика” ст. 189-191

Плоскопаралельний рух твердого тіла

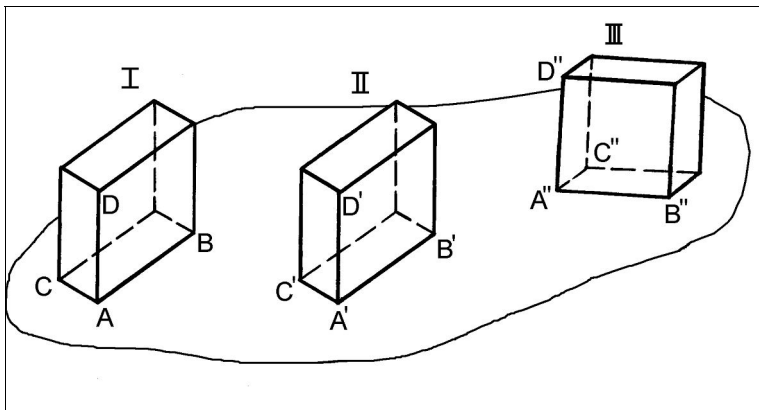
Мета роботи: Вивчити поняття лінійної швидкості і прискорення при обертальному русі тіла.

Опорний конспект

Плоским або плоскопаралельним називається такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються у площинах, паралельних деякій заданій нерухомій площині.

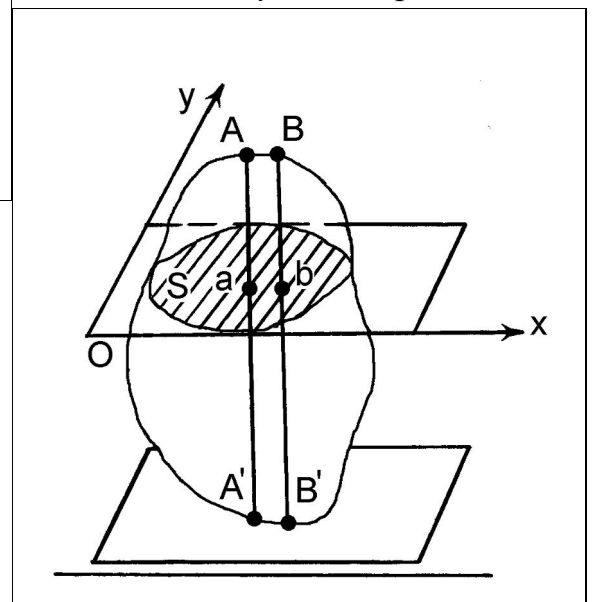
На рис. призма при русі займає послідовно три положення.

Перехід із положення I у положення II призма здійснює у поступальному русі, перехід у положення III – у плоскому русі, оскільки, наприклад, пряма AB переходить у пряму $A'B'$, які є непаралельними.



Розглянемо тверде тіло, яке здійснює плоский рух, паралельний деякій нерухомій площині Π .

Якщо ми перетнемо тіло площиною Oxy , яка паралельна

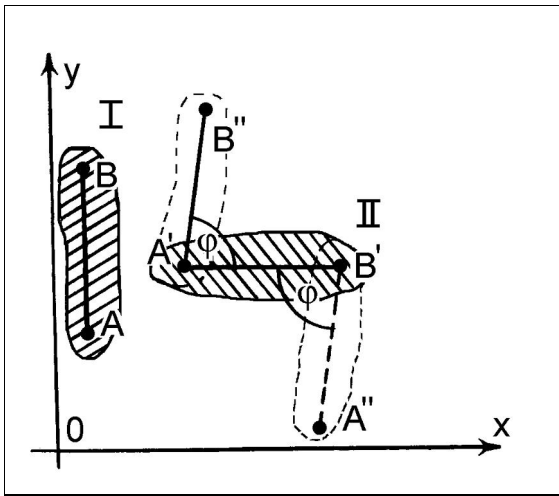


нерухомій площині Π , тоді у перерізі дістанемо плоску фігуру S . При русі тіла ця фігура буде переміщуватися, залишаючись весь час у площині Oxy . Очевидно, що при плоскому русі всі точки перпендикуляра AA' до площини фігури рухаються однаково, як і точка “а”, маючи однакові швидкості і прискорення, тому що цей перпендикуляр рухається поступально. Якщо взяти на перерізі другу точку “b” і провести перпендикуляр BB' , то всі його точки будуть мати однакові швидкості і прискорення, але $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$ і $\vec{a}_a \neq \vec{a}_b$. Якщо на перерізі взяти будь-яку кількість точок, то можна охопити все тіло разом. Таким чином, рух перерізу S може повністю репрезентувати плоскопаралельний рух всього тіла.

Звідсіть випливає, що для визначення плоского руху тіла достатньо знати рух плоскої фігури S , одержаної перерізом тіла площиною, яка паралельна даній нерухомій площині.

Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертальний

Маємо плоску фігуру S , яка рухається у площині Oxy за деякий проміжок часу Δt переміщується із положення I у положення II (рис.). Проведемо на фігурі S відрізок AB та будемо стежити за його рухом.



Це переміщення фігури S та незмінно зв'язаного з нею відрізка AB можна уявити собі складеним із поступального і обертального рухів.

Дійсно, переміщення AB у положення $A'B'$ можна уявити собі як поступальне переміщення у положення $A'B''$ і наступне обертання навколо точки A' (полюса) на деякий кут φ .

За полюс можна було б вибрати будь-яку іншу точку фігури, зокрема, точку B . З рисунка

ясно, що кут φ повороту фігури навколо полюса A' дорівнює куту повороту навколо полюса B' . Однаковий і напрям обертання – за годинниковою стрілкою. Таким чином, кут повороту і напрям обертання фігури не залежать від вибору полюса.

Відмітимо, що проведеною заміною рухів ми одержуємо той же самий кінцевий результат. Дійсно, переміщення фігури S у її площині із одного положення у друге, нескінченно близьке до першого, у границі можна замінити двома елементарними простими плоскими переміщеннями – поступальним і обертальним.

Оскільки різні точки фігури у загальному випадку рухаються з різними швидкостями, то переносний поступальний рух фігури залежить від вибору полюса.

Оскільки кут повороту і напрям обертання від вибору полюса не залежать, то кутова швидкість фігури $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ та її кутове прискорення $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ від вибору полюса також не залежать.

Визначення швидкості точок плоскої фігури

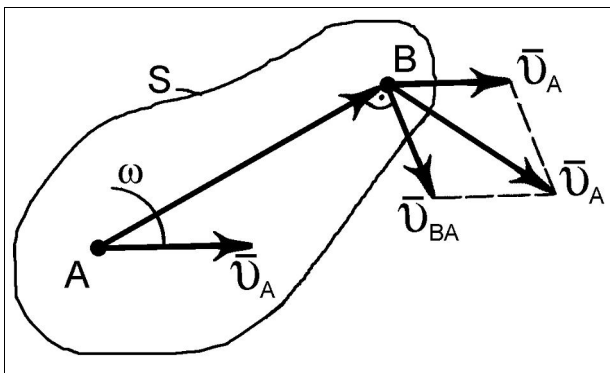
Теорема: швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі швидкості полюса і обертальної швидкості цієї точки навколо полюса.

Маємо плоску фігуру S , яка здійснює складний рух. Швидкість будь-якої точки цієї фігури, зокрема точки B , можна уявити, як векторну суму переносної та відносної швидкостей:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{B_{\text{пер}}} + \bar{v}_{B_{\text{відн}}},$$

де $\bar{v}_B$ - абсолютна швидкість точки B відносно нерухомої системи координат; $\bar{v}_{B_{\text{пер}}}$ - швидкість точки B у переносному поступальному русі; $\bar{v}_{B_{\text{відн}}}$ - швидкість

точки B у відносному русі, тобто в обертанні навколо полюса (наприклад, точки A).



Оскільки за переносний прийнято поступальний рух фігури S , то переносні швидкості будь-яких точок фігури, зокрема полюса A , однакові, тобто:

$$\bar{v}_{B_{\text{пер}}} = \bar{v}_A.$$

Величина швидкості у відносному

русі, оскільки він є обертальним, дорівнює:

$$|\bar{v}_{B_{\text{відн}}}| = \omega \cdot AB = \bar{v}_{BA},$$

де вектор швидкості $\vec{v}_{B_{відн}}$ лежить у площині фігури і спрямований перпендикулярно відрізку AB у бік обертання фігури S .

Будемо позначати відносну швидкість $\vec{v}_{BA}$. Це позначення показує, що точка B у відносному русі обертається навколо точки A . Тоді:

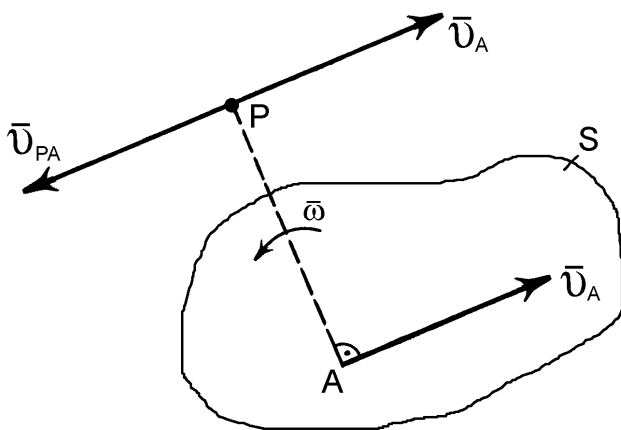
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

Теорему доведено.

Миттєвим центром швидкостей, називається точка P рухомої плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Вказана точка може бути розташованою або на самій рухомій фігурі, або на її уявному продовженні.

Розглянемо фігуру S , яка здійснює плоский рух. Швидкість деякої точки A цієї фігури вважається відомою і дорівнює $\vec{v}_A$, напрям обертання та кутова швидкість ω обертання фігури теж вважаються відомими і показані на рис.



Зробимо далі таку побудову: опустимо з точки A перпендикуляр до вектора швидкості $\vec{v}_A$, який напрямлений у бік обертання фігури. Відкладемо на цьому перпендикулярі відрізок довжиною $AP = \frac{v_A}{\omega}$

. Прийmemo точку A за полюс, тоді швидкість точки P даної фігури буде визначатись за допомогою такого

векторного рівняння:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}.$$

З цього виразу знайдемо швидкість $\vec{v}_{PA}$. Вона буде дорівнювати:

$$|\vec{v}_{PA}| = \omega \cdot AP = \omega \frac{|\vec{v}_A|}{\omega} = |\vec{v}_A|.$$

Вектор швидкості $\vec{v}_{PA}$ буде напрямлений протилежно вектору швидкості $\vec{v}_A$, тобто

$$\vec{v}_{PA} = -\vec{v}_A.$$

Тоді, підставляючи це значення швидкості $\vec{v}_{PA}$ у вираз для швидкості точки P , остаточно будемо мати:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A - \vec{v}_A = 0.$$

Таким чином, швидкість точки P дорівнює нулю, і тим самим доведено існування миттєвого центру швидкостей.

Способи визначення положення миттєвого центру швидкостей

Розглянемо декілька окремих випадків визначення положення миттєвого центру швидкостей. При цьому можуть бути такі випадки (рис. 2.31):

1. Миттєвий центр швидкостей фігури розташований на перпендикулярі, який проведено до напрямку вектора швидкості деякої точки фігури (рис. 2.31, а).

2. Миттєвий центр швидкостей фігури може бути знайдено як точку перетину двох перпендикулярів, які поставлені з двох точок фігури до напрямків векторів швидкостей цих точок (рис., б).

3. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні (рис. 2.31, в), а самі точки не лежать на одному перпендикулярі до напрямків їх швидкостей, то обертання в цей момент відсутнє, і фігура здійснює в даний момент поступальний рух, а швидкості усіх точок фігури дорівнюють одна одній.

$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = \frac{v_B}{\infty} = 0.$$

Додамо, що в цьому випадку, на відміну від поступального руху, прискорення точок будуть різні.

1. Які види рухів Ви знаєте?
2. Що таке рівнозмінний рух?

Література

1. О.О. Ердеди “Технічна механіка” ст. 70-71.
2. Е.М. Никитин “Теоретическая механика” ст. 189-191

Основне рівняння динаміки

План

2. Стійка рівновага.

Мета роботи: Вивчити поняття стійкої рівноваги.

Опорний конспект

Статична стійкість положення рівноваги твердого тіла

Положення статичної рівноваги твердого тіла називають стійким, якщо при невеликих відхиленнях тіла від цього положення, момент який повертає тіло в положення рівноваги, буде більшим за збурюючий момент, що відхиляє тіло від цього положення.

Якщо тверде тіло не прикріплене до основи, то умова його статичної рівноваги така, що сила ваги не повинна виходити за межі основи (рис. 1).

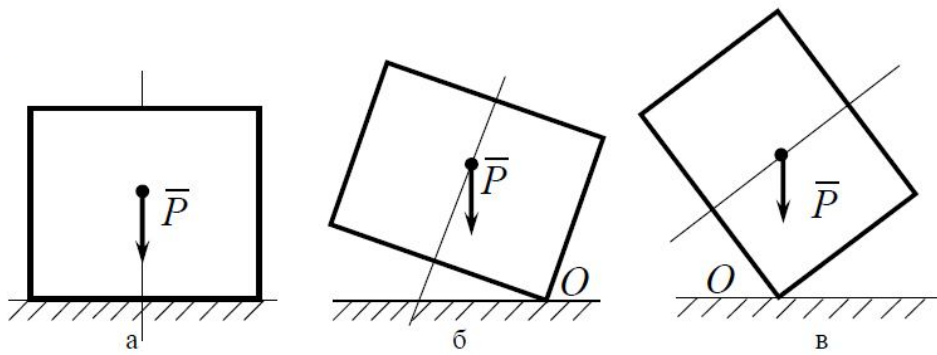


Рисунок 1

Питання для самоконтролю

3. Що таке статична стійкість?
4. Від чого залежить стійкість тіла?

Література

1. О.О. Ердеди "Технічна механіка" ст. 56-57.
2. Е.М. Никитин "Теоретическая механика" ст. 157-160

Поняття про вільну і невільну точку. Сила інерції

План

3. Стійка рівновага.

Мета роботи: Вивчити поняття стійкої рівноваги.

Опорний конспект

Статична стійкість положення рівноваги твердого тіла

Положення статичної рівноваги твердого тіла називають стійким, якщо при невеликих відхиленнях тіла від цього положення, момент який повертає тіло в положення рівноваги, буде більшим за збурюючий момент, що відхиляє тіло від цього положення.

Якщо тверде тіло не прикріплене до основи, то умова його статичної рівноваги така, що сила ваги не повинна виходити за межі основи (рис. 1).

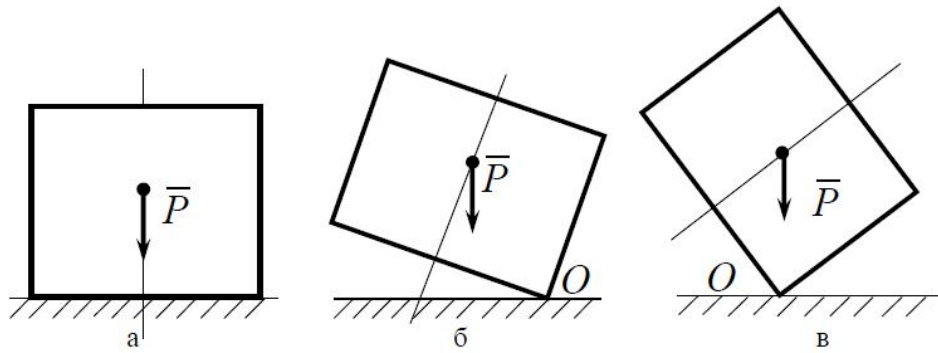


Рисунок 1

Питання для самоконтролю

5. Що таке статична стійкість?
6. Від чого залежить стійкість тіла?

Література

1. О.О. Ердеди "Технічна механіка" ст. 56-57.
2. Е.М. Никитин "Теоретическая механика" ст. 157-160

Робота і потужність при обертальному русі тіла

План

1. Робота при обертальному русі.
2. Потужність при обертальному русі.

Мета роботи: Вивчити поняття роботи і потужності при обертальному русі тіла.

Опорний конспект

Нехай до деякого твердого тілі, що обертається навколо нерухомої осі z , прикладена сила F . Розкладемо цю силу на дві взаємноперпендикулярні складові: F' , що лежить в площині Π , перпендикулярної до осі обертання z , і F'' , перпендикулярної до цієї площини, тобто паралельно до осі z .

По теоремі про роботу рівнодіючої елементарна робота сили F рівна сумі елементарних робіт складових сил F' і F'' . Але сила F'' напрямлена перпендикулярно до переміщення точки M , що проходить в площині Π , і тому її робота рівна нулю. Таким чином елементарна робота dA сили F рівна елементарній роботі складової F' :

$$dW = F' dA \cos \alpha,$$

Траєкторія точки M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, являється коло радіусу $OM=r$, а отже елементарне переміщення цієї точки $dA=r d\varphi$,

де $d\varphi$ -елементарний кут повороту тіла в радіанах, а отже:

$$dW = F' \cdot r \cdot \cos \alpha d\varphi$$

Визначимо момент сили F відносно осі обертання z :

$$M_z(F) = M_o(F') = F' \cdot OA,$$

де OA – довжина перпендикуляра, опущеного із точки O перетину осі z з площиною Π на лінію дії сили F' .

Сторони кута AOM перпендикулярні до вектора F' і v , і тому:

$$\angle AOM = (\angle F'v) = \alpha$$

отже,

$$AO = OM \cdot \cos \alpha = r \cdot \cos \alpha.$$

Момент сили відносно осі обертання тіла називають *обертальним моментом*.

Позначивши його $M_{об}$, знаходимо, що:

$$M_{об} = F' \cdot r \cdot \cos \alpha.$$

Провівши відповідну заміну в знайденому вище виразі елементарної роботи сили F , нарешті отримаємо:

$$dW = M_{об} d\varphi$$

Елементарна робота dW сили, прикладеної до тіла, що обертається, рівна добутку обертального моменту $M_{об}$ цієї сили на елементарний кут $d\varphi$ повороту тіла.

Робота сили при повороті тіла на кінцевий кут φ буде рівна:

$$W = \int M_{об} d\varphi.$$

У випадку перемінної величини обертального моменту $M_{об}$ для обчислення даного інтегралу повинна бути відома залежність обертального моменту від кута φ :

$$M_{об} = f(\varphi)$$

В випадку якщо $M_{об} = \text{const}$, будемо мати

$$W = \int M_{об} d\varphi = M_{об} \int d\varphi = M_{об} \varphi$$

Робота W при постійному обертальному моменті рівна добутку цього моменту на кут φ повороту тіла:

$$W = M_{об} \varphi$$

2. Знайдемо тепер потужність сили, прикладеної до обертального тіла:

$$P = dW/dt = M_{об} \cdot d\varphi / dt$$

але $d\varphi/dt = \omega$ – кутова швидкість тіла. Отже:

$$P = M_{об} \cdot \omega$$

Потужність P сили прикладеної до тіла, що обертається, рівна добутку обертального моменту $M_{об}$ цієї сили на кутову швидкість ω тіла.

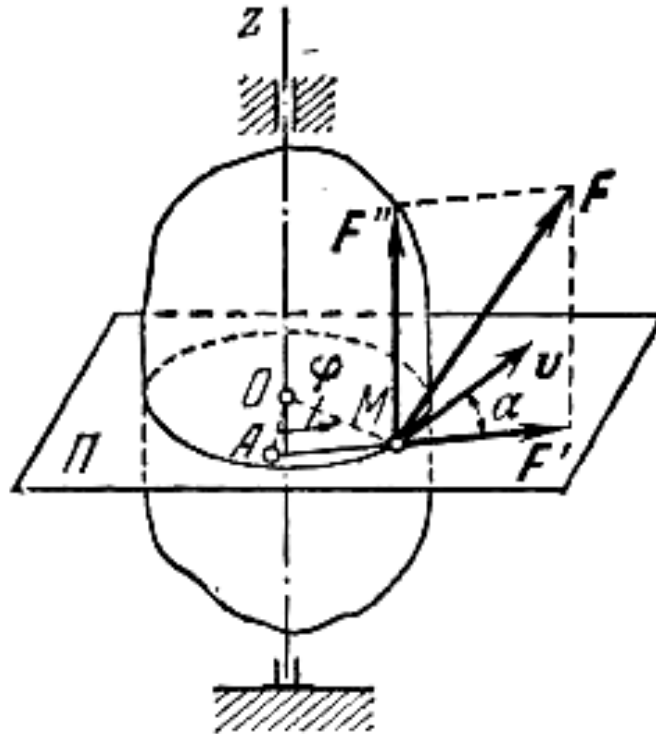
(Якщо до тіла прикладено декілька сил, то сумарну роботу і сумарну потужність цих сил визначають по аналогічних формулах, розуміючи, що в цьому випадку під обертальним моментом слід розуміти алгебраїчну суму моментів всіх сил відносно осі обертання тіла).

Якщо прикладена до тіла, що обертається сила F напрямлена по дотичній до кола, що описується точкою її прикладання, то її часто називають коловим зусиллям.

В цьому випадку $M_{об} = F \cdot r$,

де F -колове зусилля; r -радіус кола, яке описане точкою прикладання сили.

Схема обґрунтування визначення роботи і потужності при обертальному русі



Питання для самоконтролю

1. Запишіть формули для визначення роботи при поступальному і обертальному рухах.
2. Яку силу називають коловою? Що таке обертальний момент?
3. Сформулюйте теорему про роботу рівнодіючої.
4. Чому рівна потужність при обертальному русі?

Література

1. О.О. Ердеди “Технічна механіка” ст. 110-112.
2. Е.М. Никитин “Теоретическая механика” ст. 363-368

Кінетична енергія матеріальної точки

План

3. Стійка рівновага.

Мета роботи: Вивчити поняття стійкої рівноваги.

Опорний конспект

Кінетичною енергією матеріальної точки називається скалярна величина, що дорівнює половині добутку її маси на квадрат швидкості точки:

$$T = \frac{1}{2} m v^2.$$

З визначення кінетичної енергії виходить, що вона є скалярною додатною величиною; одиниця її вимірювання $H \cdot m$ або Дж.

Кінетичною енергією механічної системи називають суму кінетичних енергій всіх точок цієї системи:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n m_k v_k^2.$$

При поступальному русі твердого тіла миттєві швидкості всіх його точок однакові і дорівнюють швидкості $\vec{v}_c$ центра мас тіла. Тому формула (3.90) набуває вигляду:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2,$$

де M - маса тіла.

При обертанні тіла навколо нерухомої осі (наприклад, осі z) лінійна швидкість k -ї точки тіла $v_k = \omega h_k$, де h_k - відстань точки до осі обертання. Тоді:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n m_k (\omega h_k)^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_1^n m_k h_k^2 = \frac{1}{2} J_z \cdot \omega^2,$$

оскільки $\sum_1^n m_k h_k^2$ - момент інерції J_z тіла навколо осі обертання.

Плоскопаралельний рух тіла можна розглядати як миттєвообертальний навколо осі, що проходить через МЦШ Р. Отже, на підставі (3.92), отримаємо:

$$T_{n.n.} = \frac{1}{2} J_P \cdot \omega^2,$$

де J_P - момент інерції тіла навколо осі, що проходить через МЦШ.

Але користування формулою не завжди зручно, бо положення миттєвого центра швидкостей при русі тіла змінюється і величина J_P також буде змінною.

За теоремою Гюйгенса:

$$J_P = J_C + M(PC)^2,$$

де: J_C - момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через центр мас C тіла паралельно до миттєвої осі обертання. Крім того, якщо швидкість центра мас тіла v_c виразити через добуток кутової швидкості тіла на відстань центра мас до МЦШ - $\omega \cdot PC$, то набуває вигляду:

$$T_{n.n.} = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_C \cdot \omega^2.$$

Тобто, кінетична енергія тіла при плоскопаралельному русі складається з енергії поступального руху зі швидкістю центра мас і енергії обертального руху навколо центра мас.

Питання для самоконтролю

1. Що таке кінетична енергія?
2. Як відбувається зміна кінетичної енергії? За рахунок чого?

Література

1. О.О. Ердеди "Технічна механіка" ст. 115-118.
2. Е.М. Никитин "Теоретическая механика" ст. 374-376